交流電磁場解析

ベクトルポテンシャルの導入

図１のように，半径 a の円形コイル（ここでは，その断面積はゼロとする）に角振動数 ω，振幅 I_0 の交流電流が流れている場合，電流ベクトルは次式で与えられるものとする．

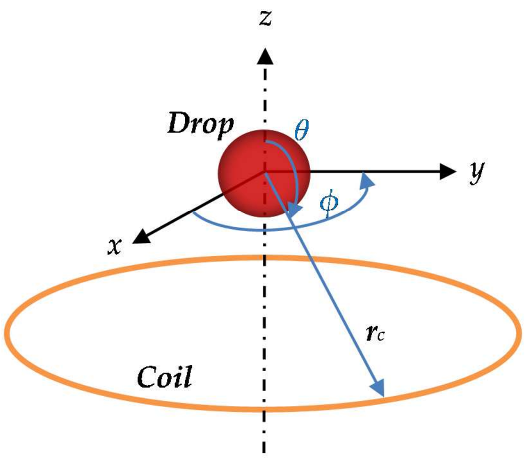

図１　コイルと液滴

$$\vec{I} = I_0 \cos(\omega t)\vec{e}_\phi \tag{1}$$

その結果，コイルまわりに交流磁場が発生するが，磁場からコイルへのフィードバックは無いものと仮定する．この場合，コイルが作る磁場はアンペールの法則から求められる．

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \delta(\vec{r} - \vec{r}_c)\mu_m \vec{I} \tag{2}$$

ただし，μ_m は透磁率，$\vec{r}_c$ はコイルの位置ベクトル，$\delta(\vec{r} - \vec{r}_c)$ は 2 次元のデルタ関数を表す．ここでは，電磁場は流れの影響を受けず軸対称であると仮定し，球座標系で考える．コイル電流は周方向（ϕ 方向）に流れるので，ベクトルポテンシャルも周方向成分のみを持つと考えられる．磁束密度はベクトルポテンシャルの回転であることを考慮して，式(1), (2)より次式が得られる．

$$\left[\nabla^2 \vec{A}\right]_\phi = -\delta(\vec{r} - \vec{r}_c)\mu_m I_0 \cos(\omega t) \tag{3}$$

式(3)のポアソン方程式を解くことにより，ベクトルポテンシャル A_ϕ が得られる．ここでは，球形液滴内の電磁場解析を行うのを目的として，式(3)を軸対称な球座標系で表すと，式(4)のようになる．

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial A_\phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial A_\phi}{\partial \theta}\right) - \frac{A_\phi}{r^2 \sin^2\theta} = -\delta(\vec{r} - \vec{r}_c)\mu_m I_0 \cos(\omega t) \tag{4}$$

ここで，A_ϕを以下のように，空間の振幅函数と時間の三角函数（複素表記）に分けて与えられるものと仮定する．

$$A_\phi(r,\theta,t)=\Re\left[\tilde{A}(r,\theta)\exp(i\omega t)\right]=A_C(r,\theta)\cos(\omega t)-A_S(r,\theta)\sin(\omega t) \tag{5}$$

式(5)を式(4)に代入すると，振幅函数A_C, A_Sに対する連立方程式が得られる．

$$\begin{cases}\left[\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2\dfrac{\partial}{\partial r}\right)+\dfrac{1}{r^2\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\dfrac{\partial}{\partial\theta}\right)-\dfrac{1}{r^2\sin^2\theta}\right]A_C(r,\theta)=-\delta(\vec{r}-\vec{r}_c)\mu_m I_0 \\ \left[\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2\dfrac{\partial}{\partial r}\right)+\dfrac{1}{r^2\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\dfrac{\partial}{\partial\theta}\right)-\dfrac{1}{r^2\sin^2\theta}\right]A_S(r,\theta)=0\end{cases} \tag{6}$$

解析空間内に導体がなければ，この式(6)を数値的に解けば電磁場が得られる．ところが今は，コイルから少し離れた位置に導電性液滴があるものとし，その液滴内部での電磁場を求めるものとする．導電性の液滴内部に生じる電流密度はオームの法則により，次式で与えられる．ただし，ここでは，液滴の流動が電磁場へ与える影響は無視できると仮定している（ベクトルポテンシャルの時間変化が誘導起電力よりもずっと大きいということに相当する）. また, 軸対称性により, 周方向の電位勾配は発生しないので, 電荷保存則は解析には必要なくなる．

$$\vec{j}=\sigma\left[-\frac{1}{r\sin\theta}\underbrace{\frac{\partial\varphi_e}{\partial\phi}}_{0}-\frac{\partial A_\phi}{\partial t}+\underbrace{\left(\vec{u}\times\vec{B}\right)_\phi}_{\cong 0}\right]\vec{e}_\phi=-\sigma\frac{\partial A_\phi}{\partial t}\vec{e}_\phi \tag{7}$$

これに式(5)を代入すれば，電流密度の周方向成分は振幅函数で表現できる．

$$\vec{j}=\sigma\omega\left[A_C\sin(\omega t)+A_S\cos(\omega t)\right]\vec{e}_\phi \tag{8}$$

この電流密度は液滴内で発生するものであり，これが作るベクトルポテンシャル$\vec{A}'$は次式で与えられる．

$$\nabla^2\vec{A}'=-\mu_m\vec{j} \tag{9}$$

トータルのベクトルポテンシャルは，式(9)と式(3)の和と考えられ，その周方向成分を改めてA_ϕと置きなおせば次式となる．

$$\left[\nabla^2\vec{A}\right]_\phi=-\mu_m j_\phi-\delta(\vec{r}-\vec{r}_c)\mu_m I_0\cos(\omega t) \tag{10}$$

この式についても，A_C, A_Sのそれぞれについて取ると，結局は以下の連立方程式が得られる．

$$\begin{cases}\left[\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2\dfrac{\partial}{\partial r}\right)+\dfrac{1}{r^2\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\dfrac{\partial}{\partial\theta}\right)-\dfrac{1}{r^2\sin^2\theta}\right]A_C=\mu_m\sigma\omega A_S-\mu_m I_0\delta(\vec{r}-\vec{r}_c) \\ \left[\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2\dfrac{\partial}{\partial r}\right)+\dfrac{1}{r^2\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\dfrac{\partial}{\partial\theta}\right)-\dfrac{1}{r^2\sin^2\theta}\right]A_S=-\mu_m\sigma\omega A_C\end{cases} \tag{11}$$

この連立ポアソン式を数値的に解いて A_C, A_S が得られれば，以下に示すように，電磁力とジュール熱が求められる．

<u>電磁力とジュール熱</u>

電磁浮遊した液滴に作用する電磁力は，それぞれ電流密度と磁束密度がわかれば求められる．電流密度の周方向成分は，式(8)より

$$j_\phi = \sigma\omega\left[A_C \sin(\omega t) + A_S \cos(\omega t)\right] \tag{12}$$

磁束密度は，

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \left\{\frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial(rA_\phi \sin\theta)}{\partial\theta}\right\}\vec{e}_r + \left\{-\frac{1}{r}\frac{\partial(rA_\phi)}{\partial r}\right\}\vec{e}_\theta \tag{13}$$

であり，各成分は

$$B_r = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(A_\phi \sin\theta)}{\partial\theta} = \frac{1}{r\sin\theta}\left[\cos(\omega t)\frac{\partial(A_C \sin\theta)}{\partial\theta} - \sin(\omega t)\frac{\partial(A_S \sin\theta)}{\partial\theta}\right] \tag{14}$$

$$B_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial(rA_\phi)}{\partial r} = -\frac{1}{r}\left[\cos(\omega t)\frac{\partial(rA_C)}{\partial r} - \sin(\omega t)\frac{\partial(rA_S)}{\partial r}\right] \tag{15}$$

電磁力は，

$$\vec{f} = \vec{j} \times \vec{B} = \left(-j_\phi B_\theta\right)\vec{e}_r + \left(j_\phi B_r\right)\vec{e}_\theta \tag{16}$$

であり，各成分の時間平均値は

$$\langle f_r \rangle = \langle -j_\phi B_\theta \rangle = \frac{\sigma\omega}{2r}\left[A_S \frac{\partial(rA_C)}{\partial r} - A_C \frac{\partial(rA_S)}{\partial r}\right] \tag{17}$$

$$\langle f_\theta \rangle = \langle j_\phi B_r \rangle = \frac{\sigma\omega}{2r\sin\theta}\left[A_S \frac{\partial(A_C \sin\theta)}{\partial\theta} - A_C \frac{\partial(A_S \sin\theta)}{\partial\theta}\right] \tag{18}$$

同様にして，ジュール熱の時間平均値は，次式により与えられる．

$$\langle \dot{q} \rangle = \left\langle \frac{\vec{j}\cdot\vec{j}}{\sigma} \right\rangle = \left\langle \frac{j_\phi^2}{\sigma} \right\rangle = \frac{\sigma\omega^2}{2}\left({A_C}^2 + {A_S}^2\right) \tag{19}$$

結局，式(17), (18)を運動方程式の外力項に，また式(19)をエネルギー方程式の熱源項に代入し解析することになる．